

Matematica III

Docente: Giulio Galise

CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni, A.A. 2021/2022

Esercitazione 1

Esercizio 1. Verificare (analiticamente) che l'insieme

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$$

è limitato, aperto e convesso.

Esercizio 2. Disegnare gli insiemi

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|(1 - y^2) \leq 0\}, \quad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 2\}$$

e stabilire (graficamente) se sono limitati, aperti, chiusi, convessi. Determinare inoltre $\overset{\circ}{X}$, $\overset{\circ}{Y}$, ∂X , ∂Y , \overline{X} , \overline{Y} .

Esercizio 3. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$. Dimostrare o confutare (esibendo un controesempio) le seguenti affermazioni:

- A aperto, B chiuso $\implies A \cap B$ chiuso
- A, B aperti e $B \subseteq A \implies \partial B \subseteq A$
- A aperto, B chiuso e $B \subseteq A \implies \partial B \subseteq A$
- A, B convessi $\implies A \cap B$ convesso.

Esercizio 4. Determinare e rappresentare graficamente l'insieme di definizione delle seguenti funzioni:

- $f(x, y) = \log\left(\frac{y - 2x^2}{x - y}\right)$
- $g(x, y) = \sqrt{y \sin(x^2 + y^2)}$
- $h(x, y) = \frac{\arcsin(x^2 + y^2 - 1)}{\log(xy)}$.

Esercizio 5. Studiare la limitatezza delle funzioni

- $f(x, y) = \frac{\log(1 + \sin(\arctan(x)))}{y^4 + 3}$
- $g(x, y) = \frac{\log(1 + |y|)}{x^4 + y^6 + 1}$.

Per la funzione $g(x, y)$ può risultare utile la disuguaglianza $\log(1 + t) \leq t$ per ogni $t > -1$.

Esercizio 6. Determinare gli insiemi di livello della funzione $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.